Cartouche du document

Année : ING 1 - Matière : Théorie des langages - Activité : Travail dirigé

Objectifs

Ce travail dirigé a pour but d'étudier la bijection entre les langages réguliers et les automates à états finis.

Les points abordés seront :

- Génération d'un automate minimal à partir de l'expression régulière d'un langage
- Génération de l'expression régulière d'un langage à partir d'un automate à états finis

Lemme d'Arden :

Soient A un alphabet et X,B,C 3 Langages définis sur A^*.

La solution de l'équation X = B X + C est :

- $X = B^* C$ si ε n'appartient pas à B.
- $X = B^+ C$ sinon

Quelques rappels utiles pour l'algorithme des quotients gauches :

- $x^* = x^+ \cup \varepsilon = x^+ + \varepsilon$ // L'union est équivalente au signe + (pas celui en exposant)
- $x^+ = xx^*$
- $x^{-1}x = \varepsilon$
- $x^{-1}Y = \varnothing$ si le sous-langage Y ne peut pas commencer par x

Sommaire des exercices

Corps des exercices

1 - Un premier langage simple

Énoncé :

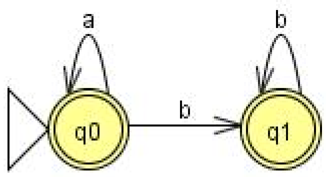
Question 1)

Énoncé de la question

Soit l'alphabet A = {a, b} et le langage $L = a^*b^*$.

Trouver un automate qui reconnaît L.

Solution de la question



Question 2)

Énoncé de la question

Vérifier cette réponse en utilisant l'algorithme des quotients gauches à partir de l'expression régulière : $L = a^*b^*$.

Solution de la question

Etape 0 //Initialisation

$L_0 = \varepsilon^{-1} L = L = a^* b^*$

Etape 1 // On calcule les quotients gauches de L_0

$a^{-1} L_0 = a^{-1} a^* b^*$

$a^{-1} L_0 = a^{-1}(a^+ \cup \varepsilon) b^*$

$a^{-1} L_0 = (a^{-1} a^+ b^*) \cup (a^{-1} \varepsilon b^*)$

$a^{-1} L_0 = (a^{-1} a\, a^* b^*) \cup (a^{-1} b^*)$

$a^{-1} L_0 = (a^* b^*) \cup \varnothing$

$a^{-1} L_0 = a^* b^* = L_0$

$b^{-1} L_0 = b^{-1} a^* b^*$

$b^{-1} L_0 = (b^{-1} a\, a^* b^*) \cup (b^{-1} b^*)$

$b^{-1} L_0 = \varnothing \cup (b^{-1}(b^+ \cup \varepsilon))$

$b^{-1} L_0 = (b^{-1} b\, b^*) \cup (b^{-1} \varepsilon)$

$b^{-1} L_0 = b^* \cup \varnothing$

$b^{-1} L_0 = b^* = L_1$

Etape 2 // On recommence avec le nouveau langage L_1

$a^{-1} L_1 = a^{-1} b^* = \varnothing = L_2$

$b^{-1} L_1 = b^{-1} b^*$

$b^{-1} L_1 = (b^{-1} b^+) \cup (b^{-1} \varepsilon)$

$b^{-1} L_1 = (b^{-1} b\, b^*) \cup \varnothing$

$b^{-1} L_1 = b^* = L_1$

Etape 3 // On continue tant qu'on trouve des nouveaux sous-langages...

Le quotient gauche de l'ensemble $\varnothing$ par n'importe quel mot est bien sûr l'ensemble $\varnothing$.

On a donc :

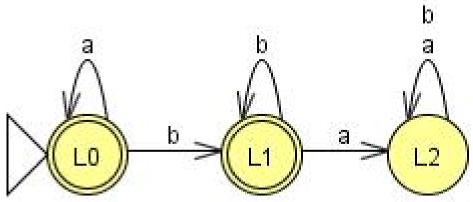
$a^{-1} L_2 = L_2$

$b^{-1} L_2 = L_2$

Pour construire notre automate, il nous suffit de construire un état pour chaque sous-langage trouvé et de suivre le résultat des quotients gauche de chaque sous-langage par tous les terminaux pour en déduire les transitions.

Les langages L_0 et L_1 contiennent le mot ε, les états de l'automate associés sont donc des états finaux.

L'automate trouvé par les quotients gauches est donc :



On remarque que l'état L_2 est l'état poubelle.

L'algorithme des quotients gauche nous génère toujours un automate **déterministe avec état poubelle**.

Question 3)

Énoncé de la question

On cherche maintenant à vérifier que l'automate est bien équivalent à l'expression régulière initiale. Pour cela, résoudre le système d'équation issu de l'automate en utilisant le lemme d'Arden.

Solution de la question

Le système d'équations de l'automate précédent est :

(1) $L_0 = a\ L_0 + b\ L_1 + \varepsilon$ // On ajoute ε à l'équation car L_0 est un état final.

(2) $L_1 = b\ L_1 + a\ L_2 + \varepsilon$ // On ajoute ε à l'équation car L_1 est un état final.

(3) $L_2 = (a + b)\ L_2$ // On factorise $a\ L_2 + b\ L_2$

Note : considérer L_2 (l'état poubelle) n'est pas indispensable.

On ne peut pas appliquer le lemme d'Arden directement à l'équation (3) car il nous manque un terme. Or l'équation peut également s'écrire :

$L_2 = (a + b)\ L_2 + \varnothing$

En appliquant le lemme d'Arden à l'équation (3), on obtient :

$L_2 = (a + b)^*\ \varnothing = \varnothing$

En remplaçant L_2 dans l'équation (2), on obtient :

$L_1 = b\ L_1 + a\ \varnothing + \varepsilon$

$L_1 = b\ L_1 + \varepsilon$

En appliquant le lemme d'Arden à l'équation (2), on obtient :

$L_1 = b^*\ \varepsilon = b^*$

En remplaçant L_1 dans l'équation (1), on obtient :

$L_0 = a\,L_0 + b\,b^* + \varepsilon$ // Or $b\,b^* = b^+$

$L_0 = a\,L_0 + b^+ + \varepsilon$ // Or $b^+ + \varepsilon = b^*$

$L_0 = a\,L_0 + b^*$

En appliquant le lemme d'Arden à l'équation (1), on obtient :

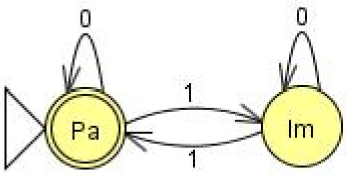
$L_0 = a^*\,b^* = L$

2 - Un deuxième langage moins simple

Question 1)

Énoncé de la question

Trouver le langage engendré par l'automate suivant par la résolution du système d'équation associé.



Solution de la question

Le système d'équations de cet automate est :

(1) $Pa = 0\,Pa + 1\,Im + \varepsilon$

(2) $Im = 0\,Im + 1\,Pa$

En appliquant le lemme d'Arden à l'équation (2), on en déduit

$Im = 0^*\,1\,Pa$

En remplaçant dans l'équation (1), on obtient :

$Pa = (0 + 1\,0^*\,1)\,Pa + \varepsilon$

En appliquant le lemme d'Arden à cette nouvelle équation, on en déduit

$Pa = (0 + 1\,0^*\,1)^*\,\varepsilon$

$Pa = (0 + 1\,0^*\,1)^* = L$

Question 2)

Énoncé de la question

Vérifier ce résultat en appliquant l'algorithme des quotients gauches sur l'expression régulière que vous venez de trouver.

Solution de la question

Etape 0

$L_0 = \varepsilon^{-1}\,L = L = (0 + 1\,0^*\,1)^*$

Etape 1

$0^{-1} L_0 = 0^{-1} (0 + 1\ 0^* 1)^*$

$0^{-1} L_0 = 0^{-1} (0 + 1\ 0^* 1)^+ \cup 0^{-1}\varepsilon$

$0^{-1} L_0 = 0^{-1} (0 + 1\ 0^* 1)(0 + 1\ 0^* 1)^* \cup \varnothing$

$0^{-1} L_0 = 0^{-1}\ 0\ (0 + 1\ 0^* 1)^* + 0^{-1}\ 1\ 0^*\ 1\ (0 + 1\ 0^* 1)^*$ // Noté (1)

$0^{-1} L_0 = (0 + 1\ 0^* 1)^* + \varnothing$

$0^{-1} L_0 = (0 + 1\ 0^* 1)^* = L_0$

$1^{-1} L_0 = 1^{-1} (0 + 1\ 0^* 1)^*$

$1^{-1} L_0 = 1^{-1}\ 0\ (0 + 1\ 0^* 1)^* + 1^{-1}\ 1\ 0^*\ 1\ (0 + 1\ 0^* 1)^*$ // D'après (1)

$1^{-1} L_0 = \varnothing + 0^*\ 1\ (0 + 1\ 0^* 1)^*$

$1^{-1} L_0 = 0^*\ 1\ L_0 = L_1$

Etape 2

$0^{-1} L_1 = 0^{-1}\ 0^*\ 1\ L_0$

$0^{-1} L_1 = 0^*\ 1\ L_0 = L_1$

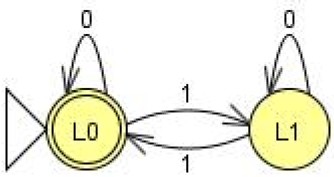
$1^{-1} L_1 = 1^{-1}\ 0^*\ 1\ L_0$

$1^{-1} L_1 = 1^{-1}(0^+ \cup \varepsilon)1\ L_0$

$1^{-1} L_1 = 1^{-1}\ 0^+\ 1\ L_0 \cup 1^{-1}\ \varepsilon\ 1\ L_0$

$1^{-1} L_1 = \varnothing \cup L_0 = L_0$

On crée ensuite l'automate correspondant :



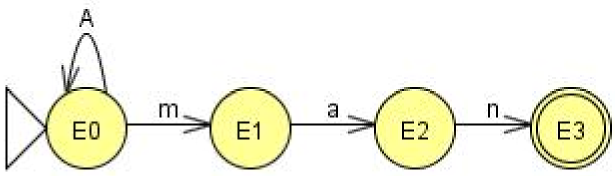
On remarque que l'on retrouve bien l'automate initial.

3 - Un troisième langage difficile

Question 1)

Énoncé de la question

Soit l'alphabet A = {a, ..., z}. On reprend l'automate indéterministe représentant le langage des mots se terminant par man :



Plutôt que de tenter de résoudre le système d'équations de l'automate déterministe (très difficile), résolvez le système d'équation de cet automate indéterministe pour trouver l'expression régulière du langage associé.

Solution de la question

Le système d'équations de cet automate est :

(1) $E_0 = A\ E_0 + m\ E_1$

(2) $E_1 = a\ E_2$

(3) $E_2 = n\ E_3$

(4) $E_3 = \varepsilon$

On remplace E_1 dans l'équation (1) en se servant de (2), (3) et (4), on en déduit

$E_0 = A\ E_0 + man$

En appliquant le lemme d'Arden à cette nouvelle équation, on en déduit

$E_0 = A^*\ man = L$

Question 2)

Énoncé de la question

Vérifier ce résultat en appliquant l'algorithme des quotients gauches sur le langage que vous venez de trouver.

Solution de la question

Etape 0

$L_0 = \varepsilon^{-1}\ L = L = A^*\ man$

Etape 1 // Ici les terminaux sont toutes les lettres de l'alphabet... On va donc traiter les cas particuliers puis regrouper tous les autres cas.

$m^{-1}\ L_0 = m^{-1}\ A^*\ man$

$m^{-1}\ L_0 = (m^{-1}\ A^+\ man) \cup (m^{-1}\ \varepsilon\ man)$

$m^{-1}\ L_0 = (m^{-1}\ A\ A^*\ man) \cup an$

$m^{-1}\ L_0 = (m^{-1}\ (m + A_{/m})\ A^*\ man) \cup an$

$m^{-1}\ L_0 = (m^{-1}\ m\ A^*\ man + m^{-1}\ A_{/m}\ A^*\ man) \cup an$

$m^{-1}\ L_0 = (A^*\ man + \varnothing) \cup an$

$m^{-1}\ L_0 = A^*\ man \cup an = L_0 \cup an = L_1$

$a^{-1} L_0 = a^{-1} A^* man$

$a^{-1} L_0 = (a^{-1} A^+ man) \cup (a^{-1} \varepsilon\ man)$

$a^{-1} L_0 = (a^{-1} a A^* man + a^{-1} A_{/a} A^* man) \cup \varnothing$

$a^{-1} L_0 = A^* man + \varnothing = A^* man = L_0$

Idem pour n et $A_{/\{m,a,n\}}$:

$n^{-1} L_0 = L_0$

$A_{/\{m,a,n\}}^{-1} L_0 = L_0$

Etape 2

$m^{-1} L_1 = m^{-1} (L_0 \cup an)$

$m^{-1} L_1 = m^{-1} L_0 \cup m^{-1} an$

$m^{-1} L_1 = L_1 \cup \varnothing = L_1$

$a^{-1} L_1 = a^{-1} (L_0 \cup an)$

$a^{-1} L_1 = a^{-1} L_0 \cup a^{-1} an$

$a^{-1} L_1 = L_0 \cup n = L_2$

$n^{-1} L_1 = n^{-1} (L_0 \cup an)$

$n^{-1} L_1 = n^{-1} L_0 \cup n^{-1} an$

$n^{-1} L_1 = L_0 \cup \varnothing = L_0$

Idem pour $A_{/\{m,a,n\}}$:

$A_{/\{m,a,n\}}^{-1} L_1 = L_0$

Etape 3

$m^{-1} L_2 = m^{-1} (L_0 \cup n)$

$m^{-1} L_2 = m^{-1} L_0 \cup m^{-1} n$

$m^{-1} L_2 = L_1 \cup \varnothing = L_1$

$a^{-1} L_2 = a^{-1} (L_0 \cup n)$

$a^{-1} L_2 = a^{-1} L_0 \cup a^{-1} n$

$a^{-1} L_2 = L_0 \cup \varnothing = L_0$

Idem pour $A_{/\{m,a,n\}}$:

$A_{/\{m,a,n\}}{}^{-1} L_2 = L_0$

$n^{-1} L_2 = n^{-1} (L_0 \cup n)$

$n^{-1} L_2 = n^{-1} L_0 \cup n^{-1} n$

$n^{-1} L_2 = L_0 \cup \varepsilon = L_3$

Etape 4

$m^{-1} L_3 = m^{-1} (L_0 \cup \varepsilon)$

$m^{-1} L_3 = m^{-1} L_0 \cup m^{-1} \varepsilon$

$m^{-1} L_3 = L_1 \cup \varnothing = L_1$

$a^{-1} L_3 = a^{-1} (L_0 \cup \varepsilon)$

$a^{-1} L_3 = a^{-1} L_0 \cup a^{-1} \varepsilon$

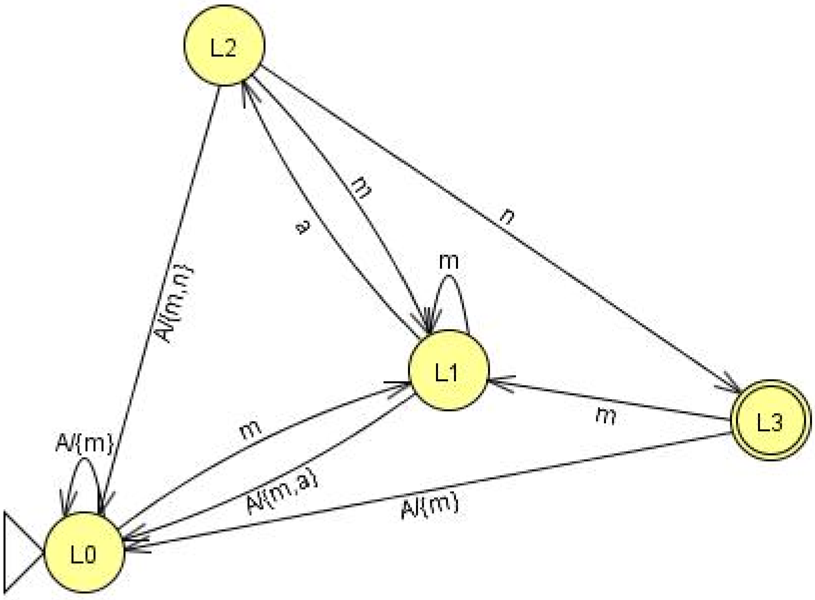
$a^{-1} L_3 = L_0 \cup \varnothing = L_0$

Idem pour n et $A_{/\{m,a,n\}}$:

$A_{/\{m,a,n\}}{}^{-1} L_3 = L_0$

$n^{-1} L_3 = L_0$

On crée ensuite l'automate correspondant :



On remarque que l'on retrouve bien l'automate déterministe associé à ce langage.